

Eesti koolinoorte LXII täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA KOOLIVOOR

Tallinnas, 15. jaanuaril 2015. a.

XII klass

Lahendamiseks on aega 4 tundi.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Arvud a , 11 , b on geomeetrilise jada kolm järjestikust liiget. Arvud a , 12 , b on aritmeetilise jada kolm järjestikust liiget. Leia $a^2 + b^2$ väärtus.

2. Lahenda võrrand: $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -\frac{1}{2}$.

3. Ristküllikus ABCD on külgede pikkused $AB=1\text{cm}$ ja $AD=4\text{cm}$. Küljele AD kui diameetrile joonestatakse ringjoon keskpunktiga O. Leia ringi ja ristküliku ühise osa pindala.

4. Toetudes Cauchy võrratusele tõesta, et iga $n \in \mathbb{Z}^+$ korral kehtib võrratus

$$n + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \geq n \cdot \sqrt[n]{n+1}.$$

Cauchy võrratus: olgu $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots, a_n \geq 0$,

siis $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$, kus $n \geq 2$.

5. Kilpkonn Katrin võib liikuda ruudulise välja peal kuues erinevas suunas: üles, alla ja nelja diagonaali suunas. Loomade vahel toimub võistlus, kus alustades ülemisest vasakust ruudust (vt.joonis) on vaja lühima ajaga külastada kõik väljaku 7×7 ruudud ning tulla tagasi. Kuna kilpkonn liigub aeglaselt, siis ta tahab külastada kõik ruudud võimalikult väikese sammude arvuga (iga liikumine järgmisse ruutu on samm). Leia vähim sammude arv, mida kilpkonn peab tegema, et külastada kõiki ruute ja lõpuks jõuda tagasi.

